

Die Menge der Eigenvektoren

Definition

Ist $\lambda \in K$ Eigenwert der linearen Abbildung A , so bezeichnet man die Menge der zu λ gehörenden Eigenvektoren

$$T_\lambda := \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$$

als **Eigenraum** zum Eigenwert λ .

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av = \lambda I v \Leftrightarrow Av - \lambda I v = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Daraus können wir folgende Schlüsse ziehen:

- \Rightarrow Der Eigenraum T_λ zum Eigenwert λ ist der Kern der Abbildung $(A - \lambda I)$
- \Rightarrow Der Eigenraum T_λ zu einem Eigenwert λ ist ein Untervektorraum (da der Kern einer linearen Abbildung ein Untervektorraum ist!)

Zur Berechnung von Eigenvektoren

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (A - \lambda I)v = 0$$

Erinnern wir uns: λ ist genau dann ein Eigenwert, wenn es dazu einen Eigenvektor $v \neq 0$ gibt.

- \Rightarrow Der Kern von $(A - \lambda I)$ muss mehr als den Nullvektor enthalten, er muss Dimension ≥ 1 haben
- \Rightarrow λ ist Eigenwert der linearen Abbildung A genau dann, wenn $\det(A - \lambda I) = 0$.

Zusammenhang Eigenwerte – Polynome

Das charakteristische Polynom

Für $A \in K^{n \times n}$ ist $\det(A - \lambda I)$ ein Polynom in λ vom Grad n . Dieses Polynom heisst charakteristisches Polynom von A .

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix A .

Beweisidee:

Zum Beispiel aus der Darstellung der Determinante mittels vollständiger Induktion. ■

Wieviele Eigenwerte hat eine Matrix?

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt:

Jede Matrix aus $\mathbb{C}^{n \times n}$ hat mindestens einen Eigenwert.

Und weil ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen hat, gilt:

Eine $n \times n$ -Matrix hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Achtung: Nicht jede komplexe $n \times n$ -Matrix hat n (verschiedene) Eigenwerte. Nullstellen können mehrfach auftreten; nur unterschiedliche Nullstellen liefern verschiedene Eigenwerte!

Weitere Schlussfolgerungen

Satz

Für ungerades n hat jede Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ mindestens einen reellen Eigenwert.

Beweisidee:

Aus dem Nullstellensatz der Analysis (\rightarrow später!) folgt, dass jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle hat. ■

Daraus ergibt sich z.B. dass es im \mathbb{R}^3 zu jeder beliebigen linearen Abbildung mindestens einen Vektor gibt, der unter dieser Abbildung seine Richtung beibehält!

Aussagen über Eigenvektoren

Mittels Induktion kann man beweisen:

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Daraus folgt:

Hat die Matrix $A \in K^{n \times n}$ n verschiedene Eigenwerte, so besitzt sie eine Basis aus Eigenvektoren.

... das kann aber auch der Fall sein, wenn die Matrix weniger als n verschiedene Eigenwerte hat!

Basistransformationen

- **WH:** Vektoren haben bezüglich verschiedener Basen verschiedene Koordinaten.
- Die Matrix einer Abbildung hängt von den Basisvektoren ab.
- Mithilfe der Eigenvektoren kann man eine Basis finden, bezüglich derer die Matrix einer linearen Abbildung *so einfach wie möglich* (*diagonal*) ist.

Die Aufgabenstellung

Gegeben:

- 2 Basen, B_1 und B_2 ; $B_2 = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$
- Koordinaten der Basisvektoren b_i bezüglich B_1 : $b_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}_{B_1}$
- Vektor v : $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2}$

Gesucht:

- Koordinaten von v in der Basis B_2 ?
- Ist A die Matrix einer linearen Abbildung bezüglich B_1 , wie sieht die Matrix dieser Abbildung bezüglich B_2 aus?

Beispiel Basistransformation

Häufiges Ziel der Berechnung von Eigenvektoren ist es, eine Basis zu finden, für die die anzuwendende lineare Abbildung möglichst einfach ist.

$$\text{Basis: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{lineare Abbildung: } \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigenvektoren der Abbildung: } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Basis: } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{lineare Abbildung: } \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basistransformation: Vektoren

Wie transferieren wir einen Vektor von Basis B_1 in Basis B_2 ?

$$\begin{aligned}
 v &= \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \\
 &= \begin{pmatrix} b_{11}\lambda_1 + \cdots b_{1n}\lambda_n \\ \vdots \\ b_{n1}\lambda_1 + \cdots b_{nn}\lambda_n \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} = T^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$T := \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

ist invertierbar, weil die Spalten linear unabhängig sind.

... **Basistransformationsmatrix** von B_1 nach B_2 .

$$\text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1}$$

Bestimmung der Basistransformationsmatrix

Die Spalte i der Basistransformationsmatrix T enthält die Koordinaten des Basisvektors b_i von B_2 bezüglich der Basis B_1 .

$$\text{Daher gilt } \forall i = 1, \dots, n: \quad b_i = B_1 \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix} = B_1 T(:, i)$$

$$\Rightarrow \quad T(:, i) = B_1^{-1} b_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad T = B_1^{-1} B_2$$

Basistransformationsmatrizen

Satz

*Ist T die Basistransformationsmatrix von B_1 nach B_2
und S die Basistransformationsmatrix von B_2 nach B_3 ,
so ist $T \times S$ die Basistransformationsmatrix von B_1 nach B_3 .*

Basistransformation: Abbildungen

Wie bestimmen wir die Matrix einer linearen Abbildung bez. der Basis B_2 ?

Gegeben: lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^n$; $v, w \in K^n$ mit $f(v) = w$

A ... Abbildungsmatrix bezüglich B_1

S ... Abbildungsmatrix bezüglich B_2

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{B_2}$$

Dann gilt: $A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}_{B_1}$ und $S \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{B_2}$

Basistransformation: Abbildungen

Mithilfe der Transformationsmatrix T erhalten wir:

$$T \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}_{B_1}, \quad T \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}_{B_1}$$

Durch Einsetzen in die Gleichungen auf der vorigen Folie erhalten wir:

$$AT \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} = T \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{B_2} \quad \text{bzw.} \quad T^{-1}AT \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}_{B_2}$$

und damit

$$S = T^{-1}AT$$

Basistransformation: Abbildungen

Satz

Ist T die Basistransformationsmatrix von der Basis B_1 in die Basis B_2 und ist f eine lineare Abbildung, zu der bezüglich B_1 die Matrix A gehört, so gehört zu f bezüglich B_2 die Matrix $T^{-1}AT$.

Beispiel Basistransformation: Abbildungen

$$\text{Basis } B_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Lineare Abbildung } A: \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Basis } B_2: \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Lineare Abbildung } S: ?$$

$$T = B_1^{-1} B_2$$

$$S = T^{-1} A T$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ähnliche Matrizen

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in K^{n \times n}$ gibt für die gilt $A = T^{-1}BT$.

... oder einfacher: Ähnliche Matrizen beschreiben bezüglich verschiedener Basen die gleiche Abbildung. Sie haben also die gleichen Eigenwerte und dieselbe Determinante!

Diagonalisierbarkeit

Definition

Eine Matrix A heißt **diagonalisierbar**, wenn sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihre Eigenvektoren eine Basis bilden. Die zur Matrix ähnliche Diagonalmatrix hat als Einträge ihre Eigenwerte.

Skalarprodukt und orthogonale Abbildungen

Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt ist eine Abbildung, die zwei Vektoren einen Skalar zuordnet. Anwendung z.B. Ermittlung von Winkeln zwischen Vektoren.

Definition

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Skalarprodukt**, wenn für alle $u, v, w \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

$$(S1) \quad \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$(S2) \quad \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$(S3) \quad \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$(S4) \quad \langle u, u \rangle \geq 0, \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

Berechnung Skalarprodukt

Für $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^\top$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ lautet das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle = u^\top v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

Beispiel: $(3 \quad 2 \quad 4) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 32$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Winkelberechnung:

$$\langle u, v \rangle = \cos \alpha \|v\| \|u\|$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\| \|u\|}$$

Norm

Eine Norm eines Vektors ist ein Maß für seine Länge.

Definition

Es sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum. Eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Norm**, wenn für alle $u, v \in V$ und für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$(N1) \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

$$(N2) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (Dreiecksungleichung)}$$

$$(N3) \quad \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0}$$

Zusammenhang Skalarprodukt – Norm

Ist V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt, so wird durch die Festlegung

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf V definiert.

Die Dreiecksungleichung kann man mithilfe der
Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

nachweisen.

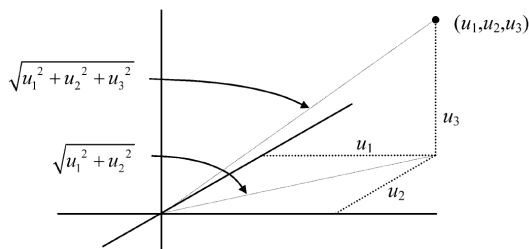
Anmerkungen Norm

- ① Normierter Vektor: Der Vektor $\frac{1}{\|u\|} u$ hat Länge 1.
- ② Die Norm eines Vektors im R^2 und R^3 ist die übliche “Länge” (Satz des Pythagoras!)

Berechnung Norm

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

vgl. Satz von Pythagoras:



Beispiel: $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$

Orthogonalität von Vektoren

Definition

In einem Vektorraum mit Skalarprodukt heißen zwei Vektoren u und v **orthogonal**, wenn gilt $\langle u, v \rangle = 0$. Wir schreiben dann $u \perp v$.

Orthogonale Abbildungen

Definition

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **orthogonal**, falls für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle f(v), f(u) \rangle = \langle v, u \rangle$$

Das heißt, orthogonale Abbildungen sind:

- längentreu
- winkeltreu

Die Matrix einer orthogonalen Abbildung bezüglich einer Orthonormalbasis heißt orthogonale Matrix. Für eine orthogonale Matrix A gilt $\det(A) = \pm 1$, für Eigenwerte λ von A gilt $\lambda = \pm 1$.

Zu den orthogonalen Abbildungen zählen die **Rotation** und die **Spiegelung**.

Rotation

Drehung um den Winkel ϕ aktiv (gegen UZS) oder passiv (im UZS) um den Koordinatenursprung.

Anmerkung: Bei der passiven Drehung wird eigentlich das Koordinatensystem im UZS gedreht.

2D:

$$\text{aktiv} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\text{passiv} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3D (aktiv):

um die x-Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

um die y-Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

um die z-Achse

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Spiegelung

2D:

um die x-Achse

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

um die y-Achse

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3D:

um die yz-Ebene

$$\begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

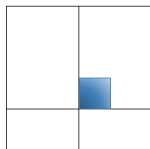
um die xz-Ebene

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

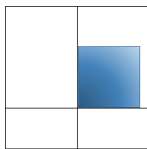
um die xy-Ebene

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

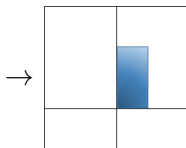
Lineare Transformationen



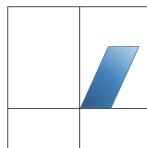
$$\rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \rightarrow$$



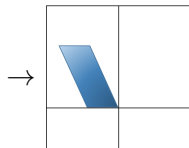
$$\rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \rightarrow$$



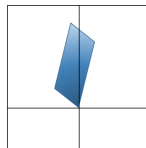
$$\rightarrow \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \rightarrow$$



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$



$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \rightarrow$$



Skalierung

Größenveränderung um den Faktor λ_x in x-Richtung und um den Faktor λ_y in y-Richtung (bzw. λ_z in z-Richtung) um den Ursprung. Ein besonderer Fall der Skalierung ist die Größenveränderung um den Faktor -1 . Dies entspricht der **Spiegelung** um die jeweilige Koordinatenachse.

2D:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3D:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

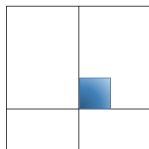
Scherung (Transvektion)

Parallelverschiebung zur jeweiligen Koordinatenachse, wobei die Länge des Verschiebungsvektors proportional zum Abstand des Punktes von der Achse ist.

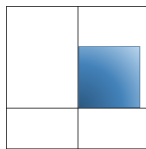
2D:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_x \\ \lambda_y & 1 \end{pmatrix}$$

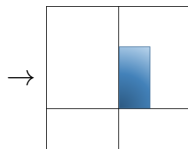
Lineare Transformationen



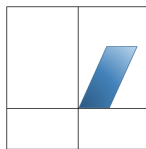
$$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow$$



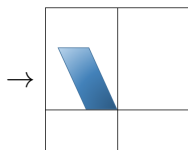
$$\rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$



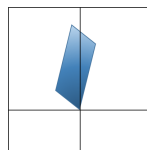
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$



$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$



$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \rightarrow$$



Translation

$$\text{Translation: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

$$\text{Lineare Abbildung: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Ax$$

→ Translation ist keine lineare Abbildung

Problem: Translation hält den Ursprung nicht fest

Lösung: „Herausnehmen“ des Ursprungs durch Einführen einer weiteren Dimension → **homogene Koordinaten**

Homogene Koordinaten

Erweiterung des Vektorraums um eine Dimension und Verschiebung des ursprünglichen Vektorraums um (gewöhnlich) $a = 1$ in Richtung der neuen Dimension.

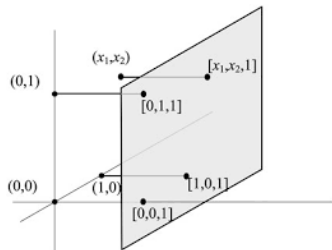
Beispiel: 2D bildet im 3D eine Ebene, die um 1 in z-Richtung verschoben wird. Der „Ursprung“ liegt nun im Punkt $[0, 0, 1]$.

kartesische
Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x/a \\ y/a \\ z/a \end{pmatrix} =$$

homogene
Koordinaten:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ a \end{bmatrix}$$



Homogene Koordinaten

Skalierung:
$$\begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation:
$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Scherung:
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translation:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Affine Abbildungen

Eine affine Abbildungen setzt sich aus einer linearen Abbildung und einer Translation zusammen und erhält drei Eigenschaften:

- *Kollinearität*: Die Bilder von Punkten, die auf einer Geraden liegen (d. h., kollinear sind), liegen wieder auf einer Geraden. Es kann sein, dass alle – aber dann alle und nicht nur einige – Punkte einer Geraden auf einen Punkt abgebildet werden.
- *Parallelität*: Die Bilder zweier paralleler Geraden sind parallel, wenn keine der beiden Geraden auf einen Punkt abgebildet wird.
- *Proportionalität*: Drei verschiedene Punkte auf einer Geraden (kollineare Punkte) werden so abgebildet, dass das Teilverhältnis ihrer Bildpunkte mit dem der Urbildpunkte übereinstimmt, außer alle drei werden auf denselben Bildpunkt abgebildet.

Werden nur Translation, Rotation und Spiegelung angewandt, ist eine affine Abbildung winkel- und längen-, also formerhaltend.

Verknüpfung Transformationen

Lineare Transformationen sind im Allgemeinen nicht kommutativ, d.h. die Reihenfolge, in der sie angewandt werden, spielt eine Rolle.

Zur Erinnerung: Verknüpfungen werden von rechts nach links ausgeführt!

Zuerst Drehung, dann Translation:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & a \\ \sin \phi & \cos \phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zuerst Translation, dann Drehung:

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & \cos \phi a - \sin \phi b \\ \sin \phi & \cos \phi & \sin \phi a + \cos \phi b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

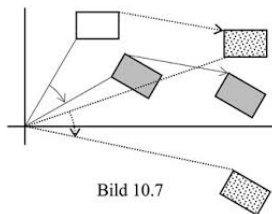
Verknüpfung Transformationen

Zuerst Drehung, dann Translation (grau):

$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & a \\ \sin \phi & \cos \phi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zuerst Translation, dann Drehung (gepunktet):

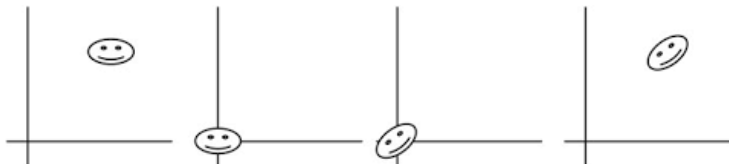
$$\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & \cos \phi a - \sin \phi b \\ \sin \phi & \cos \phi & \sin \phi a + \cos \phi b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Verknüpfung Transformationen

Achtung: Skalierung und Rotation finden um den Koordinatenursprung statt.

Soll um einen anderen Punkt als um den Ursprung (z.B. den Objektmittelpunkt) gedreht oder skaliert werden, so muss das Skalierungszentrum zunächst in den Ursprung verschoben werden. Dort wird das Objekt gedreht/skaliert und anschließend wieder an seine Ursprungsstelle zurückverschoben.



Anwendung: Orientierung eines Roboterarms

Ein Roboterarm besteht aus mehreren Gliedern, die durch Gelenke miteinander verbunden sind, am Ende dieser Kette befindet sich der Greifer. Jedes Gelenk kann Drehungen oder Translationen ausführen. Jedes Glied des Roboterarms hat ein orthogonales Koordinatensystem, welches sich bei einer Bewegung des Glieds mitbewegt. Das (kartesische) Koordinatensystem K_0 stellt die Lage der Basis des Roboters dar (Ursprung in Roboterbasis). Das letzte Koordinatensystem K_n mit den Achsen gehört zum Greifer. Gesucht sind der Ursprung und die Lage der Basisvektoren des Greifersystems in Koordinaten des Basissystems K_0 . Dies wird durch die Aneinanderreihung von Basistransformationen (eine für jedes Gelenk) erreicht.

$$T = T_{1 \rightarrow 0} \circ T_{2 \rightarrow 1} \circ \cdots \circ T_{n \rightarrow n-1}$$

Zusammenfassung

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Die Matrix A ist invertierbar
- Die Matrix A hat vollen Rang
- Die Matrix A ist regulär
- Die Determinante der Matrix A ist ungleich null
- Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar
- Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat einen nulldimensionalen Lösungsraum
- Das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung
- Der Kern der linearen Abbildung $f(x) = Ax$ hat die Dimension 0
- Die lineare Abbildung $f(x) = Ax$ ist bijektiv